Exercice 1 (3 pts)

Vrai ou faux

1) Si f est strictement croissante sur [0, 1] alors f([0, 1] = [f(0), f(1)]
2) Soit f continue et dérivable sur [0, 1], et g : x → f(x) + f(1 – x). Alors la courbe de g, dans un repère orthogonal, admet une tangente horizontale
3) Si $z_A = 1+2i$, $z_B = 4+3i$ *et* $z_C = 2-i$ alors le triangle ABC est rectangle

Q. C. M. :

il n'ya qu'une bonne réponse parmi les réponses proposées, indiquer le numéro et la lettre correspondante.

1) soit $z = \dfrac{2+2i}{\sqrt{3}+i}$ alors, la forme exponentielle de z est :

$a)\ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ $\qquad b)\ \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ $\qquad c)\ -2e^{i\frac{7\pi}{12}}$

2) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$ alors : $u_{n+1} - u_n =$

$a)\ \dfrac{1}{2(n+1)(2n+1)}$ $\qquad b)\ \dfrac{2}{(n+1)^2}$ $\qquad c)\ \dfrac{1}{(2n+1)(n+1)^2}$

Exercice 2 (6 pts)

1. a) Déterminer les racines carrées du complexe u = – 11 – 4 i $\sqrt{3}$
   b) Résoudre dans ℂ, l'équation $z^2 - z + 3 + i\sqrt{3} = 0$
   b) Mettre les solutions sous forme trigonométrique.
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on donne les points A, B et M d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_M = \sqrt{3}e^{i\theta}$, $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

   a) Montrer que $z_M - z_A = 2i\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ en déduire la distance AM en fonction de θ

   b) Déterminer θ pour que le triangle OAM soit isocèle en A.

3) On désigne par B′ le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.et N le point du plan tel que OB′NM soit un parallélogramme

   a) Déterminer les affixes des points B′ et N

   c) Déterminer l'ensemble des points N lorsque θ varie dans $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

Exercice 3 (5 pts)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{3}{8}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{5}{6}u_{n+1} - \dfrac{1}{6}u_n$

1) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

   a) Prouver que $v_{n+1} = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{6v_n}$

b) Montrer que pour tout n ∈ $\mathbb{N}$, $\frac{1}{3} < v_n < \frac{1}{2}$.

c) Démontrer que (v_n) est croissante puis qu'elle est convergente et trouver sa limite.

On revient à la suite (u_n)

2. a) Démontrer, que la suite $\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)$ est géométrique et déterminer sa limite.

b) On suppose que $u_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$ Retrouver la limite de la suite (v_n)

Exercice 4 (6 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x} - x - 1 \ \ si \ \ x \geq 0 \\ f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \ \ si \ \ x < 0 \end{cases}$

1) Dans cette question, on suppose que x < 0,

a) Montrer que $f(x) = x.\frac{\sin t}{t}$ avec $t = \frac{1}{x}$ en déduire la limite de f en - ∞.

b) Montrer que $x \leq \frac{f(x)}{x} \leq -x$ en déduire que f est dérivable à gauche en 0.

c) Calculer $f'(x)$

2) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

3) Dans cette question, on suppose que $x > 0$,

a) Déterminer la limite de f en + ∞.

b) Montrer que f est strictement décroissante sur [0, + ∞[

c) Déterminer l'image, par f, de chacun des intervalles [0, 3[puis de [1, + ∞[.

Bonne Chance